Almudena Suárez-Llanos Esteban
Uxue Quiroga Otero

Facultade de Ciencias do Mar

MATEMÁTICAS y conceptos de la formación de las olas y de su movimiento

La formación y el movimiento de las olas se relaciona con dos ecuaciones principales de las cuales luego derivan el resto. Estas dos ecuaciones son la de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad de la masa.

Para su uso las debemos de simplificar siguiendo las siguientes suposiciones:

- Tomamos el volumen de agua como una constante, es decir, suponemos que el fluido es incompresible. Con esto convertimos la ecuación de continuidad de la masa en la **ecuación de continuidad del volumen:**

  (1) $\frac{d\rho}{dt} = -\nabla * \rho\overline{v} \Rightarrow \overline{\nabla} * \overline{v} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$
- Despreciamos la influencia del movimiento de la tierra como la aceleración de Coriolis la cual igualamos a cero.
- Despreciamos la fuerza de rozamiento lo cual hace que el agua fluya de una manera más sencilla
- ignoramos los términos advectivos del movimiento

Descomponemos la **presión:** responde a ¿cómo empuja el agua?

(2) $pt(x, y, z, t) = po - \rho gz + p(x, y, z, t)$

Derivamos cada una de las ecuaciones de Navier-Stokes respecto a sus respectivas coordenadas y las sumamos.

Al sumar las derivadas y simplificar la ecuación obtenemos la **ecuación de Laplace:**

(3) $\nabla^2 p = 0$

Encontramos una solución matemática que explica cómo se ve la ola y combina coseno (curva que sube y baja) y la función que depende de la velocidad

(4) $p = A\cos(kx + ly - wt) * f(z)$

f(z) tiene que cumplir :

$-(k^2 + l^2)f(z) + f''(z) = 0$ se puede reescribir como

$f''(z) - (k^2 + l^2)f(z) = 0$ donde $k^2 + l^2 = \kappa^2$ (suma de los cuadrados de los números de onda)

solución para la f(z): $f(z) = \frac{\cos[\kappa(z+H)]}{\cos \kappa H}$

Cuando ya conocemos la presión podemos calcular la altura de la superficie libre (η) que se calcula sustituyendo en la ecuación de presión (2) z por η. obtenemos

(5) $\eta = \frac{p}{\rho g}$

Sustituimos valores en la ecuación vertical $w = \frac{d\eta}{dt}$ y obtenemos la **relación de dispresión:**

(6) $w^2 = g\kappa * \tan(\kappa H)$

- w= frecuencia angular de la onda
- g= aceleración de la gravedad
- $\kappa = \sqrt{k^2 + l^2}$: módulo del vector de onda
- H= profundidad del agua

Almudena Suárez-Llanos Esteban
Uxue Quiroga Otero

Facultade de Ciencias do Mar

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA RELACIÓN DE DISPERSIÓN
La relación de dispersión muestra que:

- si κH es muy grande estamos hablando de ondas cortas o aguas profundas entonces $tan(\kappa H)$ tiende a 1 y $w^2 = g\kappa$ y con esto sacamos que la velocidad de propagación de la onda en aguas profundas es:
  $v = \frac{w}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$
- si κH es pequeño (ondas largas o aguas someras) $tan(\kappa H)$ tiende a κH y $w^2 = gk^2H$ y con esto vemos que $v = \sqrt{gH}$

CÁLCULO DE LAS VELOCIDADES
Derivando e integrando las ecuaciones de Navier-Stokes cuando la presión ya es conocida, se puede calcular el campo de las velocidades. El agua en las olas tienen como peculiaridad que se mueve en diferentes direcciones las cuales dependen de la presión mayoritariamente.

- velocidad horizontal:
  (7) $u = \frac{Ak}{\rho w} cos\,(kx - wt) * \frac{cos\,[k(z+H)]}{cos\,(kH)}$
- velocidad lateral: asumimos que la ola se mueve solo en vertical y horizontal por lo que :
  v=0
- velocidad vertical:
  (8) $w = \frac{Ak}{\rho w} sen\,(kx - wt) * \frac{sen\,[k(z+H)]}{cos\,(kH)}$

  donde:
  - A= amplitud de la ola
  - w= frecuencia angular
  - k= número de onda
  - x= posición horizontal
  - t= tiempo
  - z=profundidad
  - H= altura total del agua

CÁLCULO DE LAS POSICIONES DE LAS PARTÍCULAS

Si integramos las velocidades u y w con respecto al tiempo obtenemos la posición de la partícula:

- Posición horizontal: integramos u con respecto al tiempo:
  (9) $\phi(t) = -\frac{Ak}{\rho w^2} sen\,(kx - wt) * \frac{cos[k(z+H)]}{cos\,(kH)}$
- Posición vertical: integramos w con respecto del tiempo:
  (10) $\psi(t) = -\frac{Ak}{\rho w} cos\,(kx - wt) * \frac{sen\,[k(z+H)]}{cos\,(kH)}$

Cuando ya tenemos las posiciones de la partícula vemos comos juntas describen una **trayectoria elíptica:**

(11) $\frac{\phi(t)^2}{a^2} + \frac{\psi(t)^2}{b^2} = 1$

donde:

- $a = \frac{Ak}{\rho w^2} * \frac{cos[k(z+H)]}{cos\,(kH)}$
- $b = \frac{Ak}{\rho w} * \frac{sen\,[k(z+H)]}{cos\,(kH)}$

con esto vemos que cuanto menor es z a y b disminuyen por lo que las elipses son más pequeñas y significa que la ola está a mayor profundidad.

Cuando kH es grande (ondas cortas o aguas profundas) las olas son más cortas y rápidas (z (profundidad) es pequeña), a y b son iguales y las partículas a estas profundidades su movimiento es circular casi.

Cuando kH es un valor pequeño hablamos de ondas largas y aguas someras. En estas a no varía con la profundidad y b disminuye con z hasta anularse en z=-H. En aguas someras el movimiento de las partículas es más lineal por eso se vuelven elípticas.